

## ● 総 説

## 単一組織拡散モデルによる減圧理論の展開

池田知純<sup>\*1)</sup> 芦田 廣<sup>\*2)</sup>

不活性ガスの拡散によって生体内外におけるガスの取り込みと排出が行われるとする減圧理論からは、組織内のガスの蓄積量をルート関数で表す所謂ルートモデルと級数関数で表す級数モデルという二つの異なった関数が導かれており、またその成果はブラックプール減圧表などとして広く使用されるに至っている。然るに、それらの発展と展開は複雑を極めており、容易には把握しがたいのが実状である。そこで、本稿ではその概要を出来るだけわかりやすく詳説するとともに、特にそれぞれの関数を導く数学的過程については初等的な知識に基づいても理解可能なように、補足を設けて簡便かつ明瞭に解説した。

キーワード：潜水，潜水医学，減圧症，減圧表，ヘンブルマン

### Development of Decompression Theory Based on the Single Slab Diffusion Model

Tomosumi Ikeda<sup>\*1)</sup>, Hiroshi Ashida<sup>\*2)</sup>

<sup>\*1)</sup> National Defense Medical College Research Institute, Division of Environment Medicine

<sup>\*2)</sup> National Defense Medical College Research Institute, Division of Biomedical Information Sciences

Development of decompression theory based on diffusion model is described. Detailed mathematical procedures to obtain decompression functions are attached.

**Keywords :** \_\_\_\_\_

Diving

Diving medicine

Decompression sickness

Decompression table

Hempleman

### 【緒 言】

潜水において、減圧症に罹患することなく浮上するための減圧スケジュールを求める減圧理論には、現行の米海軍潜水教範記載の減圧表の根拠となる所謂古典的減圧理論をはじめ幾つかあるが、中でも英海軍生理学研究所のヘンブルマン (H.V. Hempleman) 博士らによって提唱された単一組織拡散モデル (single slab diffusion model)<sup>1)~5)</sup> はその理論が古典的減圧理論<sup>6)~15)</sup> と対蹠的であるばかりでなく、その具体的成果としての減圧表も所謂The Blackpool Tables (以下ブラックプール減圧表とする)<sup>16)</sup> として広く使われ高い評価を得ている。しかるに、その理論については詳細はおろか基本的な考えについてすら邦文では明瞭な記事が認められず (英文に於ても詳細を平易にかつ具体的に記述した論文は管見の限りでは見当たらない)、謂わば一種のブラックボックスと化しているのが現状である。そこで本稿ではその理論の依って来る所以を出来るだけ解りやすく一般に理解できるように記すことにする。なお、他の減圧理論の場合と同じく、根拠となる主要論文の多くが海軍の報告書等のため入手が容易ではなく、限ら

<sup>\*1)</sup> 防衛医科大学校防衛医学研究センター異常環境衛生研究部門

<sup>\*2)</sup> 同 情報システム研究部門

れた情報による記述にとどまらざるを得ないことを了解していただきたい。また、フィート (ft) の単位が使われているが、1気圧は33フィートに相当する。

## 【背景】

二十世紀初頭に英国海軍の委嘱を受けて開発されたホールデー (J.S. Haldane) 教授らによる減圧理論はその後めざましい成果を挙げて現在に至っており、いわば古典的とも言える理論であるが、その特徴は次のようなものである<sup>6)~15)</sup>。すなわち、異なる圧力下における窒素等の生理的不活性ガス (以下特に断らない限りガスとする) の生体内外への移動は、血液が肺を循環する短い間に、血液と肺胞の間のガスの分圧の差に従って完全に行われるものとし、組織に於けるガスの蓄積あるいは排出の速度はその組織の血流量の多寡によるとしている。したがって、生体の組織をガスの移動速度からみると、移動速度の速い組織と遅い組織に分けることが可能になる。具体的には組織内の血流量の多い神経系等は移動速度の速い組織、血流量の少ない腱や皮膚、脂肪などは遅い組織になる。

その移動速度は組織に於けるガスの蓄積あるいは排出が生体内外のガス分圧のちょうど中間になるまでの時間、すなわち半減時間あるいは半飽和時間として数字で扱うことが出来るが、ホールデー教授は生体組織を半減時間5分、10分、20分、40分及び75分の五つに分けて、各組織内に存在するガス圧力と外界圧力の比を2以下に保って浮上するようにした (正確には全てがこの考えに当てはまるとは限らない。詳細は別稿<sup>12)~14)</sup>を参照されたい)。逆に言えば、いずれかの組織がこの比を超過した場合に減圧症に罹患することになる。

ところが、第二次大戦後同じ英国海軍の生理学研究所に研究員として勤務するヘンブルマン博士らは次のような矛盾点に気づいたのである<sup>1)</sup>。というのは、大多数の減圧症は潜水ないし滞底時間の長短に拘わらず四肢関節の痛み等の同じ症状を訴えるのに対し、計算の上からは、発症の原因となる前述の比が許容値を超える組織が、潜水している時間の変化に従って様々に異なってくる、つまり、臨床上からはほぼ同一の組織が減圧症の発

症に関わっているのに対し、理論上からは異なる組織が発症に関与することになる。そのようなところから、ヘンブルマン博士らは以下に述べる単一組織拡散モデルを考えたのである。なお、ガスの拡散に関する数学的処理はA.V. Hillの論文<sup>17)</sup>を参考にした模様である。論理の進め方の概要が示されている。

## 【拡散モデル】

### 1) 基本

単一組織拡散モデルの骨子はガスの組織への出入りが組織血流量の多寡によって決定されるのではなくて、組織におけるガスの拡散速度によって左右されるとするものである。

すなわち、ある面を介して一様な構成を持った二つの異なるスラブ (slab) と呼ばれる組織が接している状態を想定し、その間をガスがある拡散係数に基づいて移動すると考える。この場合は片方が血液、もう片方を生体内の組織と見なしてもよい。なお、スラブというのはヘンブルマン博士が用いている言葉で、原意はパンやチーズなど「一定の厚みを持った平べったい物」を意味しているが、「一定の厚みを持った組織」をあらわす用語と見なしても差し支えないだろう。本稿では誤解のない限り、以下組織という用語を用いる。

そうすると、ガスの移動は拡散の法則に従って移動することになるので、ある面から  $x$  離れた  $t$  時間後の不活性ガスの濃度  $C$  は拡散係数を  $D$  として Fick の拡散の第二法則といわれる次の一次元の拡散方程式で表すことが出来る (この式の導き方は補足の〔詳解1〕拡散方程式の導き方を参照)。

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}$$

### 2) ルートモデル

拡散方程式の解の一つは次のようになる (以下の式の導き方の詳細及び記号の説明は補足の〔詳解2〕拡散方程式の解の求め方及び〔詳解3〕ルートモデルの求め方を参照)。

$$C(x, t) = C \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Y \exp(-Z^2) dZ \right\}$$

ただし

$$Y = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

流束 (単位時間当たりに単価面積を移動する物

質の量)はFickの第一法則から濃度勾配に比例するので、濃度 $C(x, t)$ を $x$ で偏微分することによって求められる。即ち

$$-D \frac{\partial C}{\partial x} = C \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

が得られ、さらにこの流束を0から $T$ まで積分すると、 $T$ 時間までに取り込まれたガスの量 $Q$ (moles)が求められる。即ち

$$Q = q\sqrt{T} \quad q \text{ は定数}$$

となって、ヘンブルマン博士の拡散理論による減圧計算方法の基本の式の一つの形が導き出されたわけである。この基本の式は、生体に新たに取り込まれるガスの量は曝露時間の平方根に比例する、という極めて単純なものである。

但し、この式に関して誤解されやすい点がある。最初、最初にそれを記しておこう。その一つは、 $Q$ はあくまでガスの量であって、ガスの圧力ではないことである。二番目は先に「新たに取り込まれる」と記したように、あくまでこれは大気圧状態からより高圧状態に移行した際に新たに取り込まれたガスの量を扱っているもので、生体内に含まれているガス全体を示しているのではないことである。言い換えれば、ここに関与する圧力とは絶対圧力ではなくて、ゲージ圧力になる。この考え方は生体内のガスの圧力ないし量を全体として捉える所謂古典的減圧理論の考えとは大きく異なっていることに注意しておかなくてはならない。このような扱いは米海軍をはじめとする減圧に対する通常のアプローチにはみられない方法なので、現に定評のある米海軍潜水医官課程のテキストに於ても、拡散理論に基づく減圧計算の説明にゲージ圧力ではなくて絶対圧力を用いている<sup>18)</sup>。三番目は酸素の存在を考慮していないことである。実態と矛盾するように一見感じられるかも知れないが、一つのモデルとして了解すればよい。

なお、本稿ではこの式に基づくモデルを便宜上ルートモデルと呼ぶことにするが、原著にはそのような名称は用いられていないことを断っておく。

ここでヘンブルマン博士がとった考えの基本的な部分について記しておかなければならない。その考えとは、生体内のガスの圧力よりも溶け込んでいるガスの量を減圧の指標にするもので、生体が減圧症に罹患するためにはある一定以上のガス

の量が必要である、とするアプローチである。逆に言えば、ガスの量を一定以下に保つことが出来れば、減圧症に罹患しないで浮上出来ることになる。ということは、生体に溶け込むガスの絶対量を知ることが出来れば、ヘンブルマン博士の考えに沿って減圧計算が出来るわけだが、先の式における定数の $q$ を求め生体内のガスの絶対量を知ることが容易ではない。しかし、その絶対量を何らかの形で反映する指標があれば、絶対量を知ることなく、それを文字通り指標にして減圧計算を行うことが可能になる。

ところで、この式には拡散によってガスが溶け込む場としての圧力が示されていないが、圧力が増せば溶け込む量そのものも圧力に比例して増加すると考えてもよい。すると、ガスの絶対量 $Q$ を求めた式から、 $Q$ の代わりに任意の単位を有する指標 $S$ を用いて、次のような関係式を持ち出すことが出来る( $M$ はゲージ深度)。

$$S = M\sqrt{t}$$

つまり、 $S$ は $Q$ に比例しているのだから、減圧症に罹患しない境界のところの $S$ を求めて、それを指標として減圧計算を行えば、減圧症に罹患することなく潜水することが可能になってくる。それまでの実績から、深度100ft、滞底時間22分までは無減圧で1気圧まで浮上できることが広く知られているので、その基準となる $S$ として、

$$S = M\sqrt{t} = 100 \times \sqrt{22} \cong 475$$

あるいは滞底時間を25分とする実績もあるので

$$S = M\sqrt{t} = 100 \times \sqrt{25} = 500$$

を用いることができる。この場合繰り返すが単位は恣意的なものである。

では、200ft潜った際の無減圧時間はいくらであろうか。基準単位としてより安全サイドに立った前者の475を用いると、

$$475 = 200\sqrt{t}$$

から、 $t \cong 1.5$ となり、無減圧潜水のための滞底時間は1分半になる。

あるいはまた逆に、200ft、100分間の潜水を行った場合の最初の減圧深度はいくらにすればよいのだろうか。200ft、100分間の間に取り込まれたガスは

$$200\sqrt{100} = 2,000$$

から、2,000単位になる。一方、減圧症が引き起

こされるのは、生体内のガスの容積が深度に関わりなくある一定以上になったときと考え、また単位をあたかもそのガスの質量のようなもの、より正確には質量に比例したものとみなすと、1気圧下では475単位に相当する容積が許容されるので、減圧症に罹患しないためには、2,000単位によって生じるガスの容積も1気圧下での475単位相当のガスの容積以下にならなければならない。すると、2,000単位のガスの容積が許容値以下になるのは、 $2,000 \div 475 \approx 4.21$ 絶対気圧、ゲージ圧力では3.21気圧、即ち深度106 ftのときである。したがって106ftが最初の減圧深度になる。

次は、階段状に減圧する減圧方法を考えなければならぬ。前述のように、減圧症に罹患することのない許容できる単位は環境の圧力に比例すると考えてよい。すると、33 ftが1気圧に相当するので、ゲージ深度0 ft、大気圧下の許容単位を $S_0$ 、ゲージ深度 $n$  ftにおいて許容できる単位を $S_n$ とすると、

$$S_n = S_0 \times \{(n + 33) / 33\}$$

で表わすことが出来る。簡便のために表1に深度と許容単位を示しておく。

ここで、減圧計算の方法を具体的に示しておく<sup>2)</sup>。

まず、当時は組織は240分で飽和すると考えていたので、海底のゲージ深度をbottomの $b$ をとって $M_b$ とすると、海底に滞在中に体の組織中に入るガスの恣意的な単位の最大値は先の式から、 $M_b \times \sqrt{240}$ で表されるが、簡便さのために区切りのよい225分で飽和すると考える。するとこの値は $M_b \sqrt{225} = 15 \times M_b$ になる。一方、海底に $t_b$ 時間(分)滞在中の組織中に取り込まれたガスの単位は $M_b \sqrt{t_b}$ であるので、その時のガスの量を飽和した状態の量と比較すると $M_b \sqrt{t_b} / 15 \times M_b = \sqrt{t_b} / 15$ の割合となる。したがって、飽和状態の組織の圧力は海底の深度と同じであることから、 $t_b$ 時間経過後の組織内のガスの圧力は海底の深度にこの割合を掛けた値、即ち $M_b \sqrt{t_b} / 15$ で表すことができる(ここで、恣意的な単位から圧力に変化しているところがミソである)。そうすると、この状態から第1減圧点の $n$  ftに浮上した場合にガスを排出させようとして働く力 $M_1$ は、組織内のガス圧力と環境圧力の差、即ち

表1 深度と許容単位

深度(ft)	$S_n$	深度(ft)	$S_n$
0	475	40	1051
10	619	50	1195
20	763	60	1339
30	907	70	1483

$$M_1 = M_b \times \sqrt{t_b} / 15 - n$$

で表されることになる。したがって、第1減圧点での停止時間を $t_1$ とすると、 $t_1$ 時間の間に排出されるガスの単位は

$$M_1 \times \sqrt{t_1} = \{(\sqrt{t_b} / 15) \times M_b - n\} \times \sqrt{t_1}$$

となる\*。ここで再び単位に戻っている理由は、あくまで前記の $M \sqrt{t}$ の式から導かれる値は恣意的な単位だからである。

次の第2減圧点、 $n-10$  ftに浮上するためには、このようにして示された第1減圧点の停止時間 $t_1$ の間に排出される単位が、第1減圧点 $n$  ftに到達したときの許容単位 $S_n$ と第2減圧点に浮上が許される単位 $S_{n-10}$ の差以上にならなければならない。 $S_n$ は海底から浮上直前の値としてもよいので、数式で表すと

$$\begin{aligned} \{(\sqrt{t_b} / 15) \times M_b - n\} \times \sqrt{t_1} &> S_n - S_{n-10} \\ &= M_b \sqrt{t_b} - S_{n-10} \end{aligned}$$

となって、 $t_1$ を求めることが出来る。

次は第3減圧点に浮上するための第2減圧点における停止時間 $t_2$ を求める。

第2減圧点においてガスを排泄する力を $M_2$ とすると、第2減圧点への浮上時と同じように考えて、

$$M_2 \times \sqrt{t_2} = S_{n-10} - S_{n-20}$$

となるところの $t_2$ を求めればよい。 $M_2$ はガスを排出しようとする力であるので、生体内に含まれている量と環境圧との差になる。生体内に含まれている値はこれまでの結果であるので

$$M_b \times (\sqrt{t_b} / 15) - M_1 \times (\sqrt{t_1} / 15)$$

\* 組織内のガスは排出されるとともに減少するので、厳密にはこの関係は成り立たない。同じことは後述する級数モデルにおける取り扱いにも当てはまる。

となり、 $M_2$ は

$$M_2 = M_b \times (\sqrt{t_b}/15) - M_1 \times (\sqrt{t_1}/15) - (n-10)$$

で表すことが出来る。したがって、

$$M_2 \times \sqrt{t_2} = S_{n-10} - S_{n-20}$$

で $t_2$ を求めることが出来る。以下同じである。

ここで、実例をあげてみよう。180 ft, 25分の潜水を取り上げる。

180 ft, 25分の曝露後に生体に取り込まれたガスの単位は、 $180 \times \sqrt{25} = 900$ 単位になる。したがって、第1減圧点は $900 \div 475 \times 33 \approx 63$ ft (絶対圧力) = 30 ft (ゲージ圧力) から、30 ftになる。次の減圧点20 ftの許容単位は表1から763であるので、30 ftに減圧停止する間に、 $900 - 763 = 137$ 単位のガスが排出されればよい。

$$(M_b \sqrt{t_b}/15 - n) \times \sqrt{t_1} = M_b \sqrt{t_b} - S_{20}$$

$M_b \sqrt{t_b} = 900$ ,  $S_{20} = 763$   $n = 30$ から、 $\sqrt{t_1} = 4.57$ よって $t_1 = 21$ (分)を得る。

次の減圧点10 ftに浮上するためには619単位までガスを排出しておかなければならないので、 $763 - 619 = 144$ 単位ガスを排出する必要がある。これまでと同様に考えて、20 ftに滞在する時間を $t_2$ とすると、 $M_2 \times \sqrt{t_2} = 144$ ,  $M_2 = 60 - 30 \times 4.56/15 - 20 = 30.88$ から、 $t_2 = 22$ 分を得る。

同様にして、最後の水面まで浮上するためには $\sqrt{t_3} = (619 - 475) / M_3$ を解いて、 $t_3 = 22$ 分を得る。

したがって、深度180 ft, 滞底時間25分の潜水では、30 ftで21分, 20 ftで22分, 10 ftで22分の減圧停止時間を設けなければならないことになる。

以上がルートモデルによる減圧計算の概要である。

ヘンブルマン博士はこのモデルを検証すべく、次のような実験を行っている<sup>4)19)</sup>。即ち、山羊を一定の深度に曝露させた後、特に減圧時間を設けることなく減圧症に罹患しないで浮上出来る滞底時間と深度との関係を探るいわゆる無減圧潜水実験を実施したのである。すると、減圧症に罹患しない限界の深度と滞底時間の間には、滞底時間がおおよそ100分を超えない限り、滞底時間の平方根と深度の積、即ち $M_b \sqrt{t}$ がほぼ定値を取っているということが見出された。そして、これは取りも直さず、ルートモデルが実際の潜水に於ても成立することを強く示唆するものである、としてい

表2 米海軍無減圧潜水減圧表とルートモデルによる減圧表における許容深度と滞底時間の比較

深度 (ft)	米海軍減圧表 (分)	ルートモデル (分)
50	100	100
60	60	69
70	50	51
80	40	39
90	30	31
100	25	25
110	20	21
120	15	17
190	5	7

る。さらにこれが人間についても成り立つか否かを探るために、新たに実験をする代わりに、それまでにすでに高い評価を得ていた米海軍の無減圧潜水減圧表に基づくところの減圧症に罹患しない許容深度と滞底時間の関係をルートモデルによるそれと比較してみた。すると、 $M_b \sqrt{t}$ を500として計算したところ、表2に記したごとく、深度50 ftから100 ft, 滞底時間20分から100分の間では、両者間の数値はほぼ同じ値を示したのである。ヘンブルマン博士はこのような検証を踏まえて、米海軍の減圧表の基本となっている古典的減圧理論では七つほどの変数を想定し複雑な計算をしなければならないのに対し、ルートモデルでは非常に簡単な式で同じことが達成出来たとし、ルートモデルの妥当性に強い自信を覗かせている。

しかしながら、ルートモデルに関する記述を終えるに際し、次のことを記しておかなくてはならない。それはヘンブルマン博士らのグループによる原論文発表時にすでに指摘されているが、ルートモデルでは、先に記した計算例からも明らかのように、各減圧点間で排出しなければならないガスの量が一定になるために、第一減圧点以降の減圧スケジュールが過去の圧曝露の量に拘わらず同じになることである。このことは潜水における通常の減圧方法とは大きく異なっており、ルートモデルを無減圧潜水のみならず潜水全般に適用するに当たっては無理が生じると思われる。このことから、次の級数モデルに進んでいったのでは

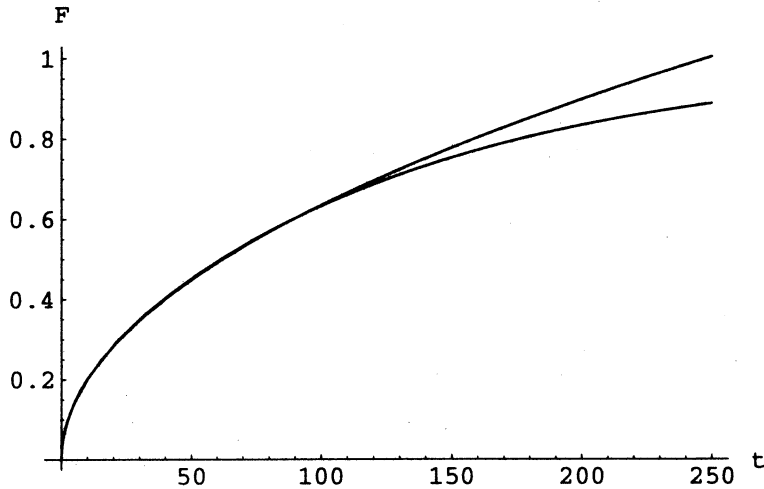


図1 級数モデルとルートモデルの比較

上の曲線がルートモデル，下の曲線が級数モデルのグラフを表す。

ないかと推測されるが，筆者の現在までの知見からは断言は出来ない。

## 2) 級数モデル

ところで，ヘンブルマン博士は同じ拡散モデルからもう一つのよく知られている解を導き出している。すなわち， $t$ 時間後のガスの飽和度 (fractional saturation) を  $F(t)$  とすると，次のように表すことが出来る (導き方の詳細は補足の [詳解4] 級数モデルの求め方を参照されたい)。なお，本稿では便宜上このモデルを級数モデルと称することにするが，原著では特に名称は付けられていないことをお断りしておく。

$$F(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot \left\{ e^{-kt} + \frac{1}{9} e^{-9kt} + \frac{1}{25} e^{-25kt} + \dots \right\}$$

この式における  $k$  は 0.007928 という値が取られているが，問題はどのようにしてその値を求めたのかである。そこに至る経過を詳細に記した一次資料は手元にないが，ヘンブルマン博士の総説<sup>4)</sup> 及び CIRIA の報告書<sup>16)</sup> によれば，組織が不活性ガスに接してから 22 分経過した時点でその組織が 30% 飽和するように 0.007928 という数値を導いたことになっている。ヘンブルマン博士によれば，当初は 25 分間の経過で 30% 飽和する値を考慮していたのが，より安全サイドに立つべくこの値に決めた由である (私信，2000)。これは，先に示し

たルートモデルにおいても取られた処理と基本的には同一の考えに基づくものとみなしてもよいのかもしれない。しかし，いずれにせよ，この  $k$  の値は級数モデルの初期の段階から現在に至るまで変わることなく続いているので，その値の採用に当たっては慎重な検討がなされたはずである。残念ながらその内実は筆者には未詳であるが，後学のため，その旨ここに記しておくことにする。

ここで，別の角度からルートモデルと級数モデルの関係を眺めてみよう。以下は Tikuisis の私信 (2000) による。級数モデルにおいて経過時間 100 分までの値を求め，さらにそれを二乗した値を経過時間に対してプロットしてみると，ほぼ直線の関係になることがわかる。とすることはつまり，経過時間 100 分までならば級数モデルもルート関数で近似出来ることになる。そこで，ルート関数を  $F = R\sqrt{t}$  として ( $R$  は定数)，それを以下に確かめてみる。100 分経過後の級数モデルの値はおよそ 0.635 としてもよいので，ルート関数に於ても同じ値をとる  $R$  として 0.0635 が導かれ，ルート関数は  $F = 0.0635\sqrt{t}$  になる。そこで今度は両者の関数をグラフで示すと，図 1 のように，経過時間 100 分まではほとんど同一のかたちになる。いかがであろうか。本来級数モデルでは  $t$  が無限大になれば 1 に収束するのに対しルート関数は無限

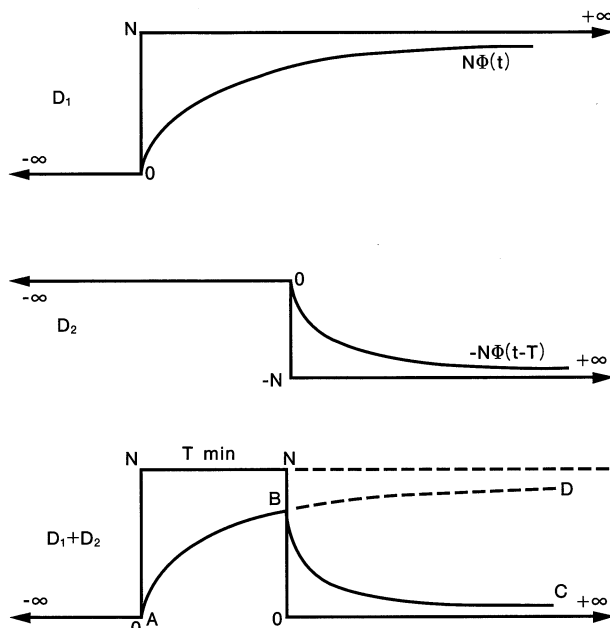


図2 ガスの取込みと排出の考え方  
(引用文献<sup>3)</sup>より許可を得て掲載)

大に拡散することから明らかなように、両者は完全に異なる関数であるのにも拘わらず、経過時間100分まではほぼ同じ値を結果的に示すことになる。このようなところから、同じ拡散モデルから級数モデルとルートモデルという別の数式が導かれることに対してある一定の説明が出来るというのである。しかしながら、ここでちょっとした巧妙なトリックが仕込まれていることに留意しておかなくてはならない。それはこの二つの数式に於て、級数モデルは飽和の割合を、ルートモデルではガス量 (moles) を、というように本来は別の単位を表すものを強引に同一の範疇に入れて全体を捉えていることである。とまれ、この問題についてはさらに詳細な検討を要するが、論理の本筋からやや外れるので、機会があれば別に記すことにしたい。

さてこの級数モデルによる拡散式を用いてヘンブルマン博士は減圧表を作成したのであるが、その考え方は通常のホールデー教授による方法とはかなり様相を異にしている。そこで、若干煩雑になるが、原論文<sup>3)</sup>に従って記していくことにする。

ガスの取り込みと排出が同じ速度でなされるとみなすと、深度1 ftの変化ごとに取り込まれあるいは排出されるガスの量を、深度が変化してから時間 $t$ の関数 $\Phi(t)$ で表すことが出来る(図2)。すると、深度 $N$  ftまで潜った場合、 $t$ 時間の間に生体内に取り込まれた窒素量は $N\Phi(t)$ になる(酸素の存在はルートモデルと同じように無視する)。他方、先の時間から $T$ 時間遅れてある一定の状態から1 ft浮上した場合を考えると、当初から $t$ 時間後のガスの排出は $T$ 時間遅れの関数 $\Phi(t)$ 、即ち $\Phi(t-T)$ で示される値になる。したがって $N$  ft浮上した場合の排出量はガスの排出なので負の符号をつけて $-N\Phi(t-T)$ で表されることになる。次に、この考えを深度 $N$  ftに $T$ 時間潜って水面に浮上してきた場合にも当てはまるとする。その場合のガスの量は、潜水を開始した時点からのガスの取り込み曲線と、 $T$ 時間後に浮上してからのガスの排出曲線の合成によって導かれるとみなすのである。

ここで当然釈然としないのが、何故浮上後も元の圧曝露の影響、図2で示すところの曲線BDの存在を考えなければならないか、である。

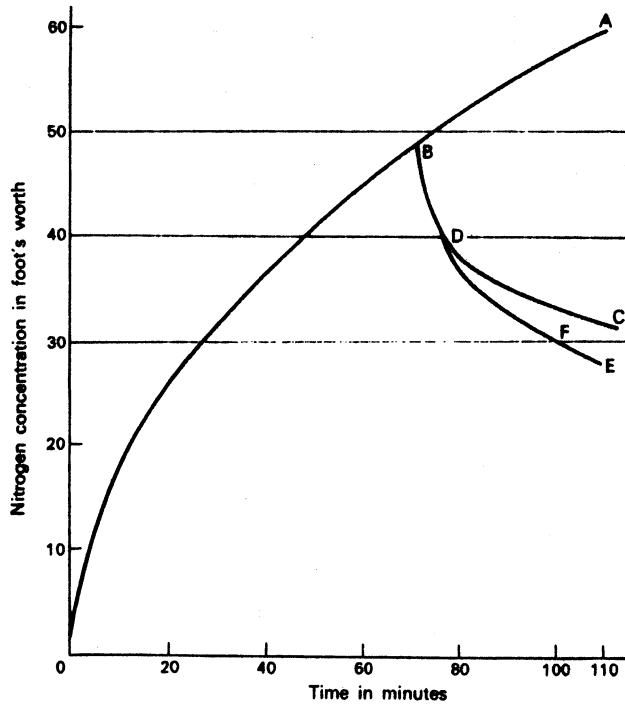


図3 減圧スケジュールの導き方  
(引用文献<sup>3)</sup>より許可を得て掲載)

そこのところを判りやすくするために、仮想の状態を具体的な数字を用いて考えてみる。いまゲージ深度100 ft (4気圧)に30分間曝露したことにして、その30分が経過したところで、環境圧力は変わらないまま、環境の空気中の窒素が完全に新しい窒素に変わったとする。ここで前者の古い窒素を記号で $N_2$ 、新しい窒素を同じく $N_2^*$ 、日本語で窒素というときには両者を区別して扱わないとすると、30分経過後も環境の圧力は変わらないことから、生体内での窒素の量は図2で曲線ABDが示すように増加していく筈である。しかし、 $N_2^*$ だけをみると、30分経過後から潜水を始めたのと同じような曲線で生体内に取り込まれていくことになる。つまり、 $N_2$ の取り込み曲線を30分だけ右に移動した曲線になる。他方、30分経過後の $N_2$ の方はそこで浮上したのと同様のことになり減少していくが、生体全体の窒素の量は曲線ABDで表されているので、その減少の様は曲線ABDから $N_2^*$ が取り込まれた量を差し引いた曲線で表されることになる。そして、30分経過後に実際に減圧した

場合の $N_2$ の減少を、このように環境ガスを換えたことと同じこととして、この曲線でもってガスの排出曲線としたのである。したがって、この場合は元の圧曝露の影響も考慮しなければならないことになる。

さて次は、この考えを用いて実際にどのように減圧計算を行ったのかを記さなければならない。

わかりやすくするために、原論文に挙げられている具体的な例によって示そう。90 ft、70分の潜水を考える(図3)。すると、生体内に取り込まれるガスの相当容量は $90\Phi(t)$ の曲線に沿って増加していくことになり、70分経過後にはおよそ48 ft相当量にまでガスの容量は増加している(図のB点に相当)。そこから減圧するのであるが、ガス容量が40 ft相当量を超える場合は10 ftまで浮上するのは減圧症に罹患するおそれがあるのに対し、ガス容量が50 ft相当量を超えなければ減圧症に罹患することなく20 ftまで浮上出来るとされているので\*、最初の減圧深度を20 ftとする。すると、ガス排出に働くネガティブな力は90 ftから20



ftの差をとり、 $70\Phi(t)$ の曲線に従って働くことになる。したがって、B点以降のガスの相当容量は、もとの曲線 $90\Phi(t)$ からB点を0分とした時間経過で $70\Phi(t)$ の曲線で示される量、即ち $90\Phi(t)$ で示される値の7/9の値をB点から下向きに引くことによって、曲線BDCが得られる。そして、この曲線の値が40ft相当量、D点に達したところで、次の減圧深度10ftに浮上出来ることになる。それまでに要する時間はグラフあるいは計算からおよそ7分になる。引き続いて次は10ftにどれだけとどまらなければならないかを求める。これまでと同じ考えに基づいて、D点以降にガス排出に働くネガティブな作用は、20ftから10ftに上昇するので、その差を取って $10\Phi(t)$ になる。そして、前回と同じようにD点からネガティブの作用を下向きにプロットし、曲線DFEを得る。生体内のガス相当容量が30ftになったところで水面0ftまで浮上出来るとするので、それに要する時間を求めると23分になる。つまり、最終減圧深度10ftでの減圧時間23分が導き出される。まとめると、90ft、70分間曝露の場合の減圧スケジュールは、20ftで7分、10ftで23分になる。

いかがであろうか。基本的にはホールデー教授の考えに基づく米海軍標準減圧表などの減圧計算とはかなり様相を異にしており、理解するのに戸惑う箇所も少なくないものと思う。

このようにして、級数モデルによる減圧表が作成されたわけであるが、原論文にはその後の経過として興味深いことが記されている。即ち、1200回以上に及ぶ高压タンクを用いた減圧実験では減圧症に罹患することが殆どなかったのが、実際に海で評価をした場合、許容限度を遙かに越える割合で減圧症に罹患するダイバーが続出したのである。具体的には56回の潜水を実施したところ、7例、実に12.5%もの高率で減圧症患者が出現している。

このようにドライ環境と実海面での減圧に顕著な差が出ることは従来より指摘されてきたことで

あるが、いずれにせよ、この発症率では実用にならない。したがって、このあと何らかの処置が取られたはずである。現在のブラックプール減圧表では、例に引いた圧曝露にほぼ相当する2.6~2.75 bar、1.0~1.5時間の潜水の場合の減圧スケジュールは、0.8 barに5分、0.6 barに10分、0.4 barに30分、0.2 barに45分、それぞれ減圧停止することになっており、これとは大きく異なっている。また、ブラックプール減圧表の前の減圧表であるImperial Tableでも、ほぼ同じ圧曝露、40~41.5 psi (pound per square inch: 14.7 psiが1気圧に相当する)、1.0~1.5時間の潜水の減圧スケジュールは、12 psiで10分、8 psiで35分、4 psiで60分となっており、これとも大きく異なっている。

ここで知りたいのは、同じ級数モデルを用いながら(級数モデルにおける $k$ の値は0.007928で現在も変わらない)どのような作業を追加することによって、現行のブラックプール減圧表を導き出したかであるが、その旨明らかに示した文献は手元にはない。ただし、ブラックプール減圧表の全容が公的に記載されている報告書の一部に、それまでに言及されていない操作を加えた減圧表作成に関する記述があるので、それが追加された作業である可能性がある。そこで次はその報告書の記述を辿っていくことにしよう。

### 3) ブラックプール減圧表

ブラックプール減圧表作成の具体的な作業の内容に立ち入る前に、その報告書<sup>16)</sup>の冒頭に記されている、減圧表を改訂するに至った事情を示しておく。

そのまず第一は、無減圧潜水ないし高压曝露の場合の2分間の減圧時間が不十分でありしばしば減圧症を発生していること、2番目は、曝露時間が4時間を超えると減圧症への罹患率が著しく上昇すること、3番目に、高压曝露作業の初心者への罹患率が常に高いこと、4番目として、実状として現場では規則(Work in Compressed Air Special Regulations, 1958)で決められている時間よりも長時間かけて減圧していること、最後に骨壊死の罹患率が高値であること、以上の五つがその理由として挙げられている。

では、同じ級数モデルを用いながらどのような計算を行って現行の減圧表を導き出したのである

前頁\* ヘンブルマン博士は組織に溶けているガス量が深度プラス30ft以内であれば減圧症に罹患しないとしたので、50ftから30ftを差し引いて20ftになる(Tikusis, 私信, 2000)。

うか。

ここで取られた大きな変化は、許容比の概念が形を変えて再び表に出てきたことである。但し、従来の方法では深度に拘わらず許容比を一定にして計算してきたのを、深度が深くなれば同一の比当りのガスの容積の変化が小さくなることから、次のような深度を考慮に入れた式\*の方がより妥当であるとし、データに合致するように定数を決めたもようである（ここで $r$ を許容比、 $P_1$ は最初の深度、 $P_2$ は次の減圧点の深度の絶対圧力とする）。

$$\frac{P_1}{P_2} = r = \frac{27.5714}{P_1 + 12.407}$$

このようにすると、深度が増加するに従って、 $r$ は減少することになる。動物実験からは絶対圧力1.96 barから4.4 barにかけて、 $r$ は1.9から1.6の間で変化することが類推されている。

計算の実例を報告書に従って一部類推を交えながら記してみよう。基本となる拡散式そのものは変わらず、22分の曝露時間で30%飽和するところの $k$ としての値も0.007928で変化がないが、加圧中の不活性ガスの取り込みは排出よりも1.5倍速いものとし、実際の曝露時間の1.5倍の時間を計算に用いることにする。その他は、先に原論文で示した対処とほぼ同様の対処を行うことになる。

例として、ゲージ圧力で3.4 bar（絶対圧力では4.4 bar）に30分間曝露した場合を考える。30分の1.5倍の45分を拡散式に入れると、42.9%飽和することになる。そしてこれをゲージ圧力3.4 barの42.9%であるところのゲージ圧力1.46 bar（ $3.4 \times 0.429$ ）に無制限に滞在している、言葉を変えればゲージ圧力1.46 barに飽和しているのと同じことと見なしたわけである。今度はこれを許容比の式に入れる。ゲージ圧力1.46 barは絶対圧力2.46

barなので、先の式の $P_1$ に2.46を代入し、 $r \approx 1.85$ を得る。したがって、最初の減圧点は $2.46/1.85 \approx 1.3$ から絶対圧力1.3 bar、ゲージ圧力0.3 barとなる。ところが、実際の減圧は0.2 barごとに減圧停止圧力を取ることにしているの、最初の減圧点の圧力はゲージ圧力で0.4 barになる。

次は、次の減圧深度であるゲージ圧力0.2 bar、絶対圧力1.2 barまで減圧症に罹患することなく安全に浮上するために要求される生体内のガス圧力を求めなければならない。そのためには先の式の $P_2$ に1.2を代入して $P_1$ を解いて、 $P_1 \approx 2.26$ を得る。したがって、絶対圧力2.26 barにまで減圧出来れば絶対圧力1.2 barまで浮上することが出来ることになる（但し、こうすると $r=1.88$ となって、浅い深度にも拘わらず、却って $r$ が大きくなるが、あまり意味のある問題ではなからうとする考えが多い（Nishi,私信,2000））。

そこで考えなければならないのが、ゲージ圧力0.4 barでどれだけの減圧停止時間を設ければ、生体内のガス圧力を2.26 barまで下げることが出来るかである。この時の対応は基本的には先に原論文の場合に示しておいたのと同様である。即ち、浮上開始後もガスの取り込みがそのまま続いていると想定する曲線と浮上後にガスを引き出そうとするネガティブな力との合成によって、0.4 barに滞在中の生体内のガスの量ないし圧力が示されることになる。そして、こうして得られたガスの排出曲線によるガス圧力が2.26 barに達するまでの時間が、0.4 barでの減圧停止時間となる。報告書でsuperimposeと記されているのは、いわゆる古典的減圧理論にみられる方法ではなくて、このような操作を示しているの注意しておかなくてはならない。出来れば原論文に当たって確認されたい。

以下、同様の操作を加えて水面まで浮上することになる。

このようにして制定されてきたブラックプール減圧表はその後も大きな変更を受けることなく主に潜函作業等の減圧表として現在に至っているが、若干の制約が加えられているようである。すなわち、減圧スケジュールそのものは変わらないにせよ、減圧表を使用してよい適用可能深度が制定当時のバージョンに較べて最近の版ではより浅

\*当初はPの単位としてpsi (pounds per square inch : 1気圧はおよそ14.7psiになるが、ヘンブルマン博士は15psiを1気圧として取り扱ったようだ)を用いたので、次のような式が提案されている。

$$r = \frac{400}{P + 180}$$

そして、psi単位で表されたものを強いてbarないし気圧の単位に換算したために、このような中途半端な数値になったわけである。

い深度に設定されていると言うことである (Nishi,私信,2000)。

#### 4) その他の減圧表

英国にはここに記したブラックプール減圧表のほかに、同じ海軍生理学研究所 (Royal Naval Physiological Laboratory: RNPL) のRNPL Metric Air Tables<sup>20)</sup>、英海軍潜水教範記載の減圧表<sup>21)</sup>、レジャー潜水の分野で高い評価を受けているBSAC (British Sub-Aqua Club) の減圧表<sup>22)</sup>などがある。それらの減圧表における減圧スケジュールの相違は単にメートルとフィートの単位の相違等による微細なものではなく、それぞれの減圧表に特有の傾向が認められるところから、減圧表の作成にあたって取られた考え方そのものが異なっている可能性が高い。しかしながら、少なくともヘンブルマン博士によれば、いずれの減圧表の制定に於ても拡散理論に基づく考え方が濃淡の差はあれ取り入れられているようなので (私信,2000)、本来ならば本稿においてもそれらの減圧表についても触れるべきであるが、如何せん、それらの減圧表の制定に関して公表されている、あるいは入手可能な資料文献は極めて限定されている。したがって、本稿に於てはその旨を記すに止めておきたい。

#### 【結語に代えて】

日本語での解説がこれまでほぼ皆無であった単一組織拡散モデルに関する記述を終えようとする今に至ってもなお隔靴搔痒の感を覚えるのが、擱筆に当たっての偽らざる所感である。しかしながら、筆者自身の菲才を脇に置いて弁解めくが、このような実状そのものが減圧理論あるいは減圧表制定の本質を反映している、と言ってもよいのではなからうか。すなわちそれらは純粹の理論と言うわけではなく、かといって理論を無視してよいものでもなく、さらにそこから導かれた結果が実用可能でなければならず、またそれらの評価に要する時間的社会的要因も無視しがたく、全ては輻輳を極める方向に作用しあっているがための、必然的な結果である、ともみなせるのである。したがって当然のことながら、本稿に於ける記述も全てが無謬であると言うつもりは毛頭ない。むしろ、これまでの記述が全て正しいと捉えられることの方を懼れる。是非批判的にお読みいただき、間違

った把握に対しては率直なご指摘を願うものである。弁明はともかく、将来減圧問題を扱うであろう本邦の後学の士にとって拙稿が聊かなりとも役に立つことがあれば、幸甚の極みである。

#### 【謝辞】

当方からの煩雑な問い合わせに誠意を持ってお答えいただいた英国のH.V. Hempleman 博士、カナダの国防文民環境医学研究所のR.Y. Nishi 及びP. Tikuisis 両博士、さらに米国のE.T. Flynn 退役海軍大佐に衷心から謝意を表す。また、防衛医学研究センターの尾立貴志 2等陸佐からは示唆に富むディスカッションをいただいた。記して謝す。

#### 【引用文献】

- 1) Hempleman HV: Investigation into the Decompression Tables, Report III. Part A: A New Theoretical Basis for the Calculation of Decompression Tables. UPS 131. London, Royal Naval Personnel Research Committee, Medical Research Council, 1952
- 2) Crocker WE & Taylor HJ: Investigation into the Decompression Tables, Report III. Part B: A Method of Calculating Decompression Stages and the Formulation of New Diving Tables. UPS 131. London, Royal Naval Personnel Research Committee, Medical Research Council, 1952
- 3) Hempleman HV: British decompression theory and practice. In: The Physiology and Medicine of Diving and Compressed Air Work. Ed by Bennett PB & Elliott DH. London, Baillière Tindall, 1969, pp291-318
- 4) Hempleman HV: Decompression theory: British practice. In: The Physiology and Medicine of Diving and Compressed Air Work, 2nd Ed. Ed by Bennett PB & Elliott DH. London, Baillière Tindall, 1975, pp.331-347
- 5) Hempleman HV: History of evolution of decompression procedures. In: The Physiology and Medicine of Diving, 3rd Ed. Ed. by Bennett PB & Elliott DH. London, Baillière Tindall, 1982, pp.317-351
- 6) Report of a Committee Appointed by the Lords Commissioners of the Admiralty to Consider and Report upon Conditions of Deep-Water Diving. London, HMSO, 1907
- 7) Boycott AE, Damant GCC and Haldane JS: The prevention of compressed-air illness. J Hygiene 8: 342-443, 1908
- 8) Workman RD: Calculation of Decompression

- Schedules for Nitrogen-Oxygen and Helium-Oxygen Dives. Research Report 6-65. Washington, D.C., U.S. Navy Experimental Diving Unit, 1965
- 9) Workman RD and Bornmann RC: Decompression theory: American practice. In: The Physiology and Medicine of Diving and Compressed Air Work, 2nd Ed. Ed. by Bennett PB & Elliott DH. London, Baillière Tindall, 1975, pp.307-330
- 10) 池田知純: 潜水医学入門—安全に潜るために. 大修館書店, 東京, 1995
- 11) 池田知純: 古典的減圧理論による減圧計算の実例. 防衛衛生 43: 391-395, 1996
- 12) 池田知純: 古典的減圧理論の展開 I: 最初の改訂減圧表まで. 日本高気圧環境医学会雑誌 31: 181-187, 1996
- 13) 池田知純: 古典的減圧理論の展開 II: 米海軍標準空気減圧表の制定. 日本高気圧環境医学会雑誌 31: 229-237, 1996
- 14) 池田知純: 古典的減圧理論の展開 III: M値の概念及び古典的減圧理論の限界. 日本高気圧環境医学会雑誌 32: 101-105, 1997
- 15) 池田知純: 減圧をめぐる諸問題. 防衛医科大学校雑誌 23: 149-62, 1998
- 16) CIRIA Report 44: A Medical Code of Practice for Work in Compressed Air. London, Construction Industry Research and Information Association, 1973
- 17) Hill AV: The diffusion of oxygen and lactic acid through tissues. Roy Soc Proc B 104: 39-96, 1928
- 18) Flynn ET, Catron PW, Bayne CG: Lesson 24. Inert gas exchange: experiments and concepts. In: Diving Medical Officer Student Guide. Naval Technical Training Command, 1981
- 19) Hempleman HV: Tissue inert gas exchange and decompression sickness. In: Proceedings Second Symposium on Underwater Physiology. Ed by Lambertsen CJ & Greenbaum LJ Jr., Washington D.C., National Academy of Sciences ? National Research Council, 1963, pp.6-13
- 20) CIRIA Underwater Engineering Group Report UR 7: RNPL Metric Air Diving Tables. London, Construction Industry Research and Information Association, 1976
- 21) BR 2806. Diving Manual. London, Ministry of Defence, Director of Naval Warfare, 1972
- 22) The BSAC '88 Decompression Tables; Sea Level. London, British Sub-Aqua Club, 1996

## 《補 足》

### 1) 詳解 1: 拡散方程式の導き方

断面積  $W$  で  $x$  から  $x+l$  までの厚さ  $l$  の薄板を考える。時刻  $t$  での  $x$  における濃度を  $C$  とする。ある物質が流束 (flux: 単位時間に単位面積を通るその物質の量)  $J$  で左から右へ流れ入るとすると、流束による薄板 (体積  $Wl$ ) の中の濃度の増加  $dC/dt$  は、 $dC/dt = JW/Wl = J/l$  で表される。また逆に、その物質は  $x+l$  の点で薄板から流れ出てもいくので、その点における濃度を  $C'$ 、その流束を  $J'$  とするとそれによる濃度変化は  $dC'/dt = J'W/Wl = J'/l$  となる。したがって、正味の濃度変化は双方の差をとって

$$(1) \quad \frac{dC}{dt} = \frac{J - J'}{l}$$

で表される。

一方、流束はそれぞれの境界での濃度勾配に比例するので (これを Fick の第一法則と言う)、拡散係数  $D$  は一定とすると

$$(2) \quad \begin{aligned} J - J' &= -D \frac{dC}{dx} + D \frac{dC'}{dx} \\ &= -D \frac{dC}{dx} + D \frac{d}{dx} \left\{ C + l \cdot \frac{dC}{dx} \right\} \\ &= D l \cdot \frac{d^2 C}{dx^2} \end{aligned}$$

となる（物質が左から右へ流れるためには  $C$  の値は右側の方が小さくしなければならず、これをそのままグラフに表した場合、 $\frac{dC}{dx}$  は負になるので、マイナス符号をつけて流速  $J$  を正の値にする。 $C'$  は元の値  $C$  に  $x$  軸の距離  $l$  に傾きを掛けた値を加えて得られる）。

これを (1) に代入し、 $C$  が  $x$  と  $t$  の関数であることを考慮して、常微分を偏微分にすると

$$(3) \quad \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}$$

を得る。これが一次元の拡散方程式である<sup>1)</sup>。

## 2) 詳解 2: 拡散方程式の解の求め方

拡散方程式

$$(3) \quad \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}$$

を変数分離法という初等的方法を用いて解く。

拡散方程式の解  $C(x,t)$  が、 $t$  だけの関数  $g(t)$  と  $x$  だけの関数  $h(x)$  の積で表わされるとして

$$(4) \quad C(x,t) = g(t)h(x)$$

を拡散方程式に代入し、整理すると

$$(5) \quad \frac{1}{Dg(t)} \cdot \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{h(x)} \cdot \frac{d^2h(x)}{dx^2}$$

となる。この左辺は  $t$  だけの関数であり、右辺は  $x$  だけの関数で、それらが常に等しいと言うことは、各辺が  $t$  にも  $x$  にも関係しない定数になると言うことである。この定数（これを固有値という）を  $-\alpha$  とすると、左辺は

$$(6) \quad \frac{1}{Dg(t)} \cdot \frac{dg(t)}{dt} = -\alpha$$

となる。この微分方程式を解くと

$$(7) \quad g(t) = \delta \exp(-\alpha Dt)$$

が得られる。ここで  $\delta$  は積分定数である。右辺は

$$(8) \quad \frac{1}{h(x)} \cdot \frac{d^2h(x)}{dx^2} = -\alpha$$

となり、この微分方程式の解は公式から

$$(9) \quad h(x) = \beta \cos \{\sqrt{\alpha} (x - \epsilon)\}$$

となる\*。ここで  $\beta$  と  $\epsilon$  は積分定数である。これは、 $(\sin x)' = \cos x$ 、 $(\cos x)' = -\sin x$  を思い出せば理解出来るだろう。

したがって、拡散方程式の解として

$$(10) \quad C(x,t) = \beta \delta \exp(-\alpha Dt) \cdot \cos \{\sqrt{\alpha} (x - \epsilon)\}$$

が得られる。積分定数をまとめて書き換えると

$$(11) \quad C(x,t) = A \exp(-\lambda^2 Dt) \cdot \cos \{\lambda (x - \epsilon)\}$$

が得られる ( $A$  は定数)。ここで

$$(12) \quad A = \beta \delta$$

$$(13) \quad \lambda^2 = \alpha$$

である。

\* これは教科書の公式を準用して初等的に解いたのであるが、より一般的には複素指数関数を用いて解く。ある条件の下ではオイラーの公式を適用してここに示した三角関数が導かれる。

この解 (11) が元の方程式 (3) を満たしていることは代入して計算すればすぐに確かめられるが、この解には未確定の積分定数と固有値が含まれており、この未確定の値は方程式だけでは決まらないことに注意する必要がある。実際、例えば積分定数や固有値を整数倍した

$$(14) \quad C(x,t) = 3A \exp(-4\lambda^2 Dt) \cdot \cos\{2\lambda(x-5\epsilon)\}$$

も元の方程式 (3) を満たす。その意味で (11) はこの拡散方程式 (3) の一般解である。(3) は線形偏微分方程式であるので、(11) の積分定数  $\epsilon$  や固有値  $\lambda$  を変えた有限個または無限個の和も、さらには (11) を  $\epsilon$  や  $\lambda$  で積分したもの、あるいは定数項を加えたものも拡散方程式 (3) の解になっている。この積分定数や固有値を確定するには、初期条件や境界条件が必要になる。

### 3) 詳解 3: ルートモデルの求め方

このようにして得られた拡散方程式の解を用いて、次にルートモデルを求めてみよう。

$$(15) \quad x > 0 \text{ のとき } C(x, 0) = 0$$

$$(16) \quad x = 0 \text{ のとき } C(x, t) = C : \text{一定値}$$

の条件を満たす拡散方程式の解を求める。前述したように解 (11) を  $\lambda$  と  $\epsilon$  に関して積分したのも

$$(17) \quad C(x,t) = \iint A \exp(-\lambda^2 Dt) \cdot \cos\{\lambda(x-\epsilon)\} d\lambda d\epsilon$$

も元の拡散方程式の解になる。(17) の二重積分を実行する。まず  $\lambda$  に関して積分する。この積分は Laplace の積分としてよく知られているもので、初等的に計算するのは厄介であるが、数学公式集を見れば、

$$(18) \quad \int_0^\infty \exp(-\lambda^2 Dt) \cdot \cos\{\lambda(x-\epsilon)\} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{(x-\epsilon)^2}{4Dt}\right)$$

となることがわかる<sup>2)</sup>。次に (18) を  $\epsilon$  について積分する。ここで積分変数を置換して

$$(19) \quad Z = \frac{x-\epsilon}{2\sqrt{Dt}}$$

とすると、

$$(20) \quad d\epsilon = -2\sqrt{Dt} dZ$$

となるので、

$$\begin{aligned} (21) \quad C(x,t) &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{(x-\epsilon)^2}{4Dt}\right) d\epsilon \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{Dt}} \int_Y^{-\infty} \exp(-Z^2) (-2\sqrt{Dt}) dZ \\ &= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^Y \exp(-Z^2) dZ \end{aligned}$$

となる。ここで

$$(22) \quad Y = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

である。さらにこの積分を区間分割すると

$$\begin{aligned} (23) \quad \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^Y \exp(-Z^2) dZ &= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^0 \exp(-Z^2) dZ + \sqrt{\pi} \int_0^Y \exp(-Z^2) dZ \\ &= \frac{\pi}{2} + \sqrt{\pi} \int_0^Y \exp(-Z^2) dZ \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Y \exp(-Z^2) dZ \right\} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、第一項の積分は正規分布関数の積分である<sup>3)</sup>。

ここで、(3) の線形偏微分方程式では、導かれた式を定数倍しても、あるいはまた定数項を付け加えて

も式は成り立つので、(15) (16) を満足するように (12) (17) の  $A$  を決めると、ルートモデルの解として

$$(24) \quad C(x,t) = C \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-Z^2) dZ \right\}$$

が得られる。(22) (24) が拡散方程式 (3) と条件 (15) (16) を満たすことは代入すれば確かめることが出来る。(24) から流束 (flux)  $J$  は

$$(25) \quad J(x,t) = -D \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{CD}{2\sqrt{Dt}} \exp(-Y^2) \\ = C \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \exp(Y^2)$$

となる。したがって時刻  $T$  までに  $x=0$  の面を通過して流入した物質質量  $Q$  は

$$(26) \quad Q = \int_0^T J(0,t) dt = 2C \sqrt{\frac{D}{\pi}} \sqrt{T} = q \sqrt{T}$$

となる ( $q$  は定数)。これがルートモデルである。

#### 4) 詳解 4: 級数モデルの求め方。

次に同じく級数モデルを求めてみよう。

条件を

$$(27) \quad x=0 \text{ と } x=2b \text{ の時 } C(x,t) = B : B > 0 \text{ 一定値}$$

$$(28) \quad 0 < x < 2b \text{ の時 } C(x,0) = 0$$

とすると、これの Fourier 級数展開の形は

$$(29) \quad B \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2b} x \right\}$$

となるので<sup>4)</sup>

$$(30) \quad \lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2b}$$

$$(31) \quad \epsilon = \frac{b}{2n-1}$$

とすると、(11) 式は

$$(32) \quad C(x,t) = A \cdot \exp \left\{ - \left( \frac{(2n-1)\pi}{2b} \right)^2 Dt \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2b} x \right\}$$

となる。ここで、 $t=0$  とすると

$$(33) \quad C(x,0) = A \cdot \sin \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2b} x \right\}$$

となる。

すると、(29) は (33) の無限和に定数をかけ、定数項を加えた形になっているので、(29) も  $C(x,0)$  としてよい。したがって

$$(34) \quad C(x,0) = B \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2b} x \right\}$$

が導かれる。

一方、(34) 式を考慮して、(32) 式に係数をかけて無限和を取り、さらに定数を加える式を求めると

$$(35) C(x, t) = B \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cdot \exp \left[ - \left( \frac{(2n-1)\pi}{2b} \right)^2 Dt \right] \cdot \sin \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2b} x \right] \right\}$$

が導かれる\*。(35)で $t=0$ とすると、確かに(34)となるので、解の存在と一意性の定理\*\*から、(35)が拡散方程式(11)の解であることが確認出来る。

ここで、濃度 $C(x, t)$ を $x$ について0から $b$ まで積分すると、時刻 $t$ に厚さ $b$ の組織に存在する物質質量 $Q$ になる。即ち

$$(36) Q = \int_0^b C(x, t) dx$$

$$= \left[ B \left\{ x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b}{(2n-1)^2 \pi} \exp \left[ - \left( \frac{(2n-1)\pi}{2b} \right)^2 Dt \right] \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2b} x \right] \right\} \right]_0^b$$

$$= Bb \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \exp \left[ - \left( \frac{(2n-1)\pi}{2b} \right)^2 Dt \right] \right\}$$

となる。ここで飽和度を $F$ とすると、 $Q$ を $Bb$ で除して、よく知られた

$$(37) F(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left\{ e^{-kt} + \frac{1}{9} e^{-9kt} + \frac{1}{25} e^{-25kt} + \dots \right\}$$

が導かれる。ここで $k = D\pi^2/4b^2$ である。(37)の右辺の級数は $t=0$ の時に $\pi^2/8$ に収束し、 $t$ を無限にすると0に収束する<sup>5)</sup>。

\*よりオーソドックスな解法として、グリーン函数や超函数を用いる方法があるが専門的になるので、ここではやや変則的な方法を用いた。

\*\*微分方程式とその初期及び境界条件がある種の数学的条件(微分可能性や連続性など)を満たすならば、その解は一通りしか存在しないという定理。ここで扱ったような拡散方程式と初期・境界条件では一意性の定理が成り立つ。

#### 【補足引用文献】

- 1) 千原秀昭, 中村巨男(訳): 物理化学 (原題Atkins PW: Physical Chemistry, 4th ed. Oxford University Press, 1990). 東京, 東京化学同人, 1993. 第24章: 気体運動論及び第25章: イオン輸送と拡散. 特にpp.1111-1117及びpp.1155-1162に詳しい.
- 2) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 数学公式1. 東京, 岩波書店, 1956, p.233. 上から5番目の式に当る.
- 3) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 数学公式1. 東京, 岩波書店, 1956, p.232. 2番目の表の最初の項に当る.
- 4) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 数学公式2. 東京, 岩波書店, 1957, p.72. 最初の式に当る.
- 5) 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信: 数学公式2. 東京, 岩波書店, 1957, p.41. 二番目の表の一番上の項に当る.